Fac-similé d'une lettre d'Abel.

Nous publions ici en fac-similé la dernière page d'un manuscrit d'ABEL composé de quatre pages et contenant le mémoire: *Notes sur quelques formules elliptiques* (voir CRELLE, t. 4, p. 85—93, HOLMBOE, t. 1, p. 299—308, SYLOW et LIE, t. 1, p. 466—477).

La lettre est absolument inédite. Les annotations d'une écriture qui n'est pas celle d'ABEL sont de la main de CRELLE.

Le manuscrit de même que celui que nous avons publié au tome 26 de ce journal fait partie de la collection MANZONI. Dans le catalogue de vente, il porte le numéro 3 et il y est indiqué qu'il a appartenu à la collection Libri. La date 25 septembre 1828 a été supprimée par CRELLE. La raison a dû en être que le § 1 du second mémoire *Recherches sur les fonctions elliptiques*, publié sous le titre *Théorèmes sur les fonctions elliptiques* et portant la date 27 août 1828, n'a paru que dans le cahier qui suit celui où ont paru les *Notes*. La lettre semble d'un très grand intérêt en raison de ses indications sur les derniers mois de la vie d'ABEL.

7

On pourra ajouter qu'on aura en meme temps

$$49\cdots\quad E(b,\theta') = k\sqrt{\mu}\cdot E(c,\theta)$$

où k est un autre nombre rationnel. — Par là on aura immediatement ce theoreme

Si l'équation differentielle

$$49\cdots\quad \frac{dy}{\sqrt{A-B\cdot y^2+C\cdot y^4}} = a\frac{dx}{\sqrt{A+B\cdot x^2+C\cdot x^4}}$$

est integrable algébriquement il faut necessairement que le coefficient a soit égal à la racine carrée d'un nombre rationnel et positif, en supposant que les quantités A, B, C, a soient réelles; et si a a cette forme on pourra trouver une infinité de valeurs convenables pour A, B, C.

Now fini terminerons en remarquant par la demonstration d'une formule curieuse qu'on pourra tirer de l'équation (20)

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \sqrt[6]{2}\cdot\frac{\sqrt[24]{r}}{\sqrt[12]{bc}}$$

En y changeant c en b, b se changera en c et r en q donc

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots = \sqrt[6]{2}\cdot\frac{\sqrt[24]{q}}{\sqrt[12]{bc}}$$

En comparant ces formules on voit que l'équation

$$50\cdots\quad \frac{1}{\sqrt[24]{r}}\cdot(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\cdots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}}(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots$$

toutes les fois que les quantités r et q sont moindres que l'unité et liés entre elles par l'équation

$$\log r\cdot\log q = \pi^2$$

Il existe un grand nombre de relations semblables entre q et r, ~~mais celle là paraît être la plus simple et ne sont la suivante~~ par exemple la suivante:

$$\sqrt[4]{b\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+r+r^4+r^9+r^{16}+\cdots\right) = \sqrt[4]{b\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+q+q^4+q^9+q^{16}+\cdots\right)$$

qui est due à Mons: Cauchy (Exercices de Mathematiques).

On pourra la deduire de la formule

$$\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\cdots$$

donné par M. Jacobi en y changeant c en b.

Christiania le 25 Sept. 1828

19/10 28

Ihren lieben Brief von 10 d habe ich vor einiger Tagen erhalten und danke ihnen dafür recht sehr. Es hat mir um so Freud gemacht als ich nicht so bald Antwort erwartet hatte. — Ich hätte ihnen eher geschrieben, aber ich wollte gerne die Gelegenheit zur Sendung einer kleinen Abhandlung benutzen. Das die Hoffnung wegen meiner baldigen Anstellung gut ist freut mich natürlich sehr und ich denke ihnen schon im voraus für ihre Bemühungen. Aber ich bitte Sie so bald etwas abgemacht, entweder nicht, um davon in Kenntniss zu sitzen so bald möglich; denn wenn es nicht dort nach Wunsch geht so muss ich daran denken mein Glück hier zu befestigen, allein ich kann hier keinen Posten sehen ich weiss wie es geht. Bitte bitte gewissen Sie mir doch. —

Dass denke ich ihnen dafür dass Sie sich die Mühe gegeben die ausgeschriebenen Stellen aus den Briefen von Jacobi und Legendre abzuschreiben. Die Männer denken mit Freude sind sie gelesen haben. Ich Jacobi hasst zwar zu viel. Ich sehe aus seinen Aeusserungen dass er auf einem andern Weg als ich zu der Theorie der Transformationen gekommen, aber wenn er einmal dessen allgemeines gefunden hat so begreife ich nicht wie er dazu gekommen ist, und ich bin sehr neugierig um seine Methode kennen zu lernen. — Sie müssen ihn doch auffordern mit etwas zu kommen denn es ist klar dass er in Besitz vorzüglicher Data ist. — Die obigen Bemerkungen über die elliptischen Functionen bitte ich sie gefälligst ins Journal aufnehmen zu wollen. Hätten Sie vielleicht im nächsten Heft eine kleine Seiten übrig. Es ist ja nicht viel wie Sie sehen. — Dass Sie die Precis d'une théorie des fonctions elliptiques annehmen wollen freut mich sehr. Ich werde mich anstrengen eine diese Abhandlung so deutlich und gut als mir es möglich ist zu machen, und ich hoffe dass Sie mir gelingen soll. Glauben Sie aber nicht es wäre das beste mit dieser Abhandlung gleich mit der über die Gleichungen den Anfang zu machen. Dieses ist auf eine dringende Bitte an Sie, denn erstens glaube ich dass die elliptischen Functionen mehr Interesse haben werden und zweitens so wird mann gesandheit mir Zeit erlauben mich mit der Gleichungen in einiger Zeit zu beschäftigen. Ich bin nämlich gegenwärtig so dass ich der bitte fähig bin, und ob ich gleich jetzt ziemlich gut bin so wird mir doch, wie der Arzt sagt, viel Anstrengung sehr nachtheilig sein. Nun aber wird mir die Gleichungen nur wenig mehr Anstrengung kosten als die elliptischen Functionen. Wenn Sie also nicht die Abhandlung über die Gleichungen vor Langen (denn in diesem Falle sollen Sie sie haben) so wird ich mit der über die ell: Funct: anfangen. Übrigens soll die Gleichungen bald nachfolgen, wenn ich Die nicht begründet haben so denke ich die Abtheilungen so klein zu machen dass in jedem Heft etwas über elliptische Funct und etwas über die Gleichungen vorkommt. Nur für den ersten Heft ~~ist nicht~~ möchte ich gerne blos elliptische Funct: haben. — Lassen Sie mir doch, ich bitte, ihre Meinung darüber wissen. — Ihr ergebenster N. Abel

Ljustryck af Chr. Westphal Stockholm.